LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

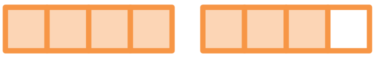
En matemática, se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros.

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$, que significa «cociente». Este conjunto de números incluye a los números enteros (positivos y negativos), decimales y a las fracciones.

Fracciones

Una fracción s un cociente entre dos números enteros, a y b, llamados numerador y denominador, respectivamente.

El denominador indica la cantidad de partes iguales en las que se divide el entero, el numerador cuántas de esas partes debemos considerar.

$\frac{3}{5} =$  $\frac{7}{4} =$  $\frac{3}{3} =$ 

Las fracciones se clasifican en:

Propias: el numerador es menor que el denominador, $\frac{3}{5}$, y representan un número menor que 1.

Impropias: el numerador es mayor que el denominador, $\frac{7}{4}$, y representan un número mayor que 1. Si el numerador de la fracción es múltiplo del denominador, las fracciones representan números enteros y se llaman **fracciones aparentes** $\frac{3}{3} = 1$

Clasifiquen cada una de las siguientes fracciones en propias (P), impropias (I) o aparentes (A)

$$a)\ \frac{1}{5} \qquad b)\ \frac{5}{4} \quad c)\frac{10}{2} \quad d)\ \frac{3}{4} \quad e)\frac{18}{9} \quad f)\ \frac{7}{18}$$

Números Decimales

Si efectuamos la división entre el numerador y el denominador de una fracción, el cociente de la división es la expresión decimal de la fracción. Ejemplo: 7/2 = 3,5 ½= 0,5 ¼= 0,25 5/2= 2,5

Escribe la expresión decimal equivalente a:

$$\frac{3}{5} = \quad \frac{5}{3} = \quad \frac{4}{11} = \quad \frac{11}{10} = \quad \frac{3}{8} = \quad \frac{4}{7} = \quad \frac{7}{6} = \quad \frac{17}{20} = \quad \frac{25}{4} = \quad \frac{9}{13} =$$

Fracciones Equivalentes

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Para obtener fracciones equivalentes, se debe multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número distinto de cero.

$$\frac{2}{3} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{7}{4} = \frac{7.8}{4.8} = \frac{56}{32} \qquad \frac{5}{6} = \frac{5.7}{6.7} = \frac{35}{42}$$

Cuando se divide, se está simplificando la fracción

$$\frac{20}{50} = \frac{20:5}{50:5} = \frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5} \rightarrow fracción\ irreducible$$

Actividades:

1) Hallen la fracción irreducible de cada una de las siguientes fracciones decimales

$$a)\frac{4}{10} = \qquad \text{b)}\ \frac{15}{10} = \qquad \text{c)}\ \frac{2}{100} = \qquad \text{d)}\frac{125}{100} =$$

2) Escriban tres fracciones equivalentes a las dadas y, de ser posible, que una de ellas sea decimal:

$$\text{a)}\frac{1}{2}= \quad b)-\frac{3}{4}= \quad c)\frac{5}{3}= \quad d)-\frac{7}{5}= \quad e)\frac{1}{25}= \quad f)\ \frac{5}{6}= \quad g)-\frac{9}{14}= \quad h)\frac{3}{40}=$$

3) Hallen la fracción irreducible de cada una de las siguientes fracciones

$$a)\ \frac{8}{24}= \quad b)-\frac{25}{125}= \quad c)\ \frac{90}{100}= \quad d)\ \frac{27}{69}= \quad e)-\frac{9}{45}= \quad f)\ \frac{128}{320}= \quad g)-\frac{10}{55}= \quad h)-\frac{24}{120}=$$

Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones

En una fiesta la comida era solamente pizzas, que se cortaron en porciones iguales. Después que terminó la fiesta, en cada bandeja quedaron algunas porciones.

Para saber que parte de las pizzas quedó sin comerse, es necesario sumar cada una de las partes de cada pizza: $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

Es decir que para sumar o restar fracciones, se tiene que tener en cuenta que:

Con el mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador

En primer lugar se reducen los denominadores a común denominador (fracciones equivalentes, mismo denominador), y se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas. Y de ser posible se debe simplificar la fracción resultante.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{9+6+2}{12}=\frac{17}{12}$$

Actividades

1) Unan cada par de fracciones con el MCM de sus denominadores

$$a)\ \frac{1}{3}\ y\ \frac{2}{5} \quad b)\frac{4}{2}\ y\ \frac{5}{4} \quad c)-\frac{2}{3}\ y-\frac{1}{6} \quad d)\frac{3}{4}\ y\ \frac{1}{8} \qquad 1)8 \quad 2)15 \quad 3)4 \quad 4)6$$

2) Buscar un común denominador y luego resolver:

$$a)\frac{1}{2}+\frac{5}{8}-\frac{3}{5}= \quad b)1-\frac{5}{2}-\frac{4}{3}= \quad c)\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-5= \quad d)2\frac{1}{2}+1\frac{3}{5}-\frac{3}{4}= \quad e)\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-1= \quad f)-\frac{7}{20}+1\frac{4}{5}-2\frac{7}{10}+\frac{5}{2}$$
$$=$$

$$g)\frac{3}{10}+\frac{1}{5}-\frac{3}{2}= \quad h)\frac{3}{8}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}+1= \quad i)-2+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}-\frac{7}{6}= \quad j)1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}-\frac{7}{8}= \quad k)3\frac{1}{5}-1\frac{3}{10}-5\frac{1}{2}=$$

3) Planteen y resuelvan los siguientes problemas

a) Los tres séptimos de los alumnos de tercer año no realizan ningún deporte, la mitad juega al futbol y los otros practican tenis. ¿Qué fracción del total práctica tenis? 1/14

b) Joaquín utilizó 1/3 de su sueldo para comprar comida, ¼ del mismo para comprar ropa y el resto lo depósito en el banco. ¿Gasta más en ropa o en comida? En comida ¿Qué fracción del sueldo depósito? 5/12 ¿Depósito mayor o menor cantidad que la mitad de su sueldo? menor cantidad.

c) El asfalto de un camino se realizó en etapas: las dos quintas partes, el primer día; un tercio, el segundo día; y se completó el trabajo en el tercer día. ¿Qué fracción de trabajo se realizó el tercer día? 4/15¿Qué día se asfalto la mayor parte del camino? el primer día ¿y la menor? el tercer día.

d) Un auto necesita los 3/5 del tanque para recorrer la primera etapa de un camino, ¾ para la segunda y 5/8 para la tercera. ¿Le alcanza el tanque para recorrer las tres etapas? No le alcanza ¿En cuál de las etapas debe recargar combustible? en la segunda ¿Llega a consumir dos tanques en toda la carrera? No ¿En cuál de las etapas recorre mayor parte del camino? en la segunda.

Multiplicación de fracciones

La multiplicación de dos fracciones es otra fracción que tiene: Por numerador el producto de los numeradores. Por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

Antes de efectuar la multiplicación de los numeradores y denominadores, se debe simplificar cualquier numerador con cualquier denominador y viceversa.

Simplificar una fracción es transformarla en una fracción equivalente más simple.

Para simplificar una fracción dividimos numerador y denominador por un mismo número.

$$\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}=\frac{4}{3} \qquad \text{a) } \frac{2}{7}.\left(-\frac{1}{3}\right)= \qquad \boldsymbol{b})\ -\frac{3}{5}.\left(-\frac{2}{5}\right)=$$

División de fracciones

La división de dos fracciones es otra fracción que tiene:

Por numerador el producto de los extremos.

Por denominador el producto de los medios.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \frac{5}{7}:\frac{1}{6}=\frac{30}{7} \qquad a)\ \frac{2}{3}:\left(-\frac{5}{4}\right)= \qquad b)\ -3:\frac{1}{4}=$$

Operaciones combinadas

Para resolver un cálculo combinado, debe respetarse el orden de resolución de las operaciones:

Primero deben resolverse las multiplicaciones y divisiones y luego las sumas y restas.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}.\frac{5}{2}-3:\frac{2}{5}=-\frac{41}{8} \qquad \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right):\frac{3}{10}+\frac{5}{6}=\frac{7}{18}$$

<u>Actividades:</u>

1) Resuelvan mentalmente cada uno de los siguientes cálculos

$$a)\ 1.\frac{3}{5}= \quad b)\ \frac{7}{8}.1= \quad c)\frac{1}{2}.\frac{1}{2}= \quad d)\ \frac{1}{3}.\frac{1}{4}= \quad e)-\frac{2}{3}.\frac{2}{3}= \quad f)\ \frac{4}{5}.\frac{5}{4}= \quad g)\frac{5}{7}.\left(-\frac{7}{5}\right)= \quad h)3.\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{5}\right)=$$

2) Resuelvan las siguientes multiplicaciones simplificando cuando sea posible.

$$a)-\frac{4}{15}.\frac{3}{5}.\frac{1}{8}= \quad b)\frac{12}{25}.\left(-\frac{15}{8}\right).\left(-\frac{7}{6}\right)= \quad c)\frac{2}{30}.\frac{5}{4}.\left(-\frac{14}{15}\right)= \quad d)-\frac{8}{100}.\left(-\frac{25}{3}\right).\left(-\frac{5}{7}\right)= \quad e)\frac{6}{40}.\left(-\frac{8}{18}\right).\frac{16}{20}=$$

3) Resuelvan cada una de las siguientes divisiones y simplifiquen cuando sea posible

$$a)-\frac{25}{33}:\frac{15}{22}= \quad b)\frac{12}{35}:\left(-\frac{4}{21}\right)= \quad c)-\frac{7}{12}:\left(-\frac{14}{20}\right)= \quad d)\frac{45}{28}:\frac{18}{35}= \quad e)\frac{21}{25}:\left(-\frac{18}{15}\right)= \quad f)-\frac{16}{24}:\frac{20}{27}=$$

4) Separen en términos, resuelvan los siguientes cálculos combinados y marquen la opción correcta

$a)\frac{1}{5}-\frac{3}{5}.\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=$ $\quad I)\frac{31}{20}$ $\quad II)\ \frac{15}{10}$ $\quad III)-\frac{31}{20}$ $\quad IV)-6$ $\quad b)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right).\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}\right)=$ $\quad I)\frac{7}{45}$ $\quad II)\ \frac{5}{15}$ $\quad III)-\frac{7}{45}$ $\quad IV)-3$

REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Los números racionales se caracterizan por tener un desarrollo decimal finito o infinito, y según esto, la expresión sólo puede ser de tres tipos:

- **Exacta**: la parte decimal tiene un número finito de cifras. Ejemplo: $\frac{8}{5}=1,6$
- **Periódica pura:** toda la parte decimal se repite indefinidamente. Ejemplo: $\frac{1}{7}=0,142857142857\ldots=0,\overline{142857}$
- **Periódica mixta:** no toda la parte decimal se repite. Ejemplo: $\frac{1}{60}=0,01666\ldots=0,01\overline{6}$

REPRESENTACIÓN RACIONAL DE LOS NÚMEROS DECIMALES

Recíprocamente, todo número con un desarrollo decimal puede expresarse en fracción de la siguiente manera:

- **Decimales exactos o finitos**: Se escribe en el numerador la expresión decimal sin la coma (como un número entero), y en el denominador un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales. Ejemplo:

$34,65=\frac{3465}{100}$ $\qquad 24,5=\frac{245}{10}$ $\qquad 5,678=\frac{5678}{1000}$

Expresa estos decimales a fracción:

$7,5=\qquad 0,00005=\qquad -4,12=\qquad -9,2=\qquad 0,01=\qquad -30,008=$

- **Decimales periódicos puros**: La fracción de un número decimal periódico tiene como numerador la diferencia entre el número escrito sin la coma, y la parte anterior al periodo; y como denominador, tantos "9" como cifras tiene el periodo. Ejemplo: $15,3434\ldots=\frac{1534-15}{99}$

Escribe cada número periódico con un arquito.

$0,44444\ldots=\qquad 5,425425425425\ldots=\qquad 1,5555\ldots=\qquad 2,4766666\ldots=\qquad 3,212121\ldots=\qquad 0,01242424\ldots=$

- **Decimales periódicos mixtos**: Tendrá como numerador la diferencia entre *a* y *b*, donde *a* es el número escrito sin la coma, y *b* es el número sin la parte decimal periódica, escritos ambos como números enteros. El denominador tendrá tantos "9" como cifras tiene el periodo y otros tantos "0" como cifras decimales no periódicas haya. Ejemplo: Sea el número $12,345676767\ldots$ entonces $a=1234567$ y $b=12345$, por lo que el número buscado será $\frac{1234567-12345}{99000}$

Escribe una fracción equivalente a cada uno de estos números periódicos:

$0,\widehat{6}=\qquad 3,1\widehat{26}=\qquad 1,\widehat{6}=\qquad 3,1\widehat{26}=\qquad 0,\widehat{12}=\qquad 3,12\widehat{6}=\qquad 0,1\widehat{2}=\qquad 31,\widehat{26}=$

POTENCIAS Y RAICES CON RACIONALES

- En la potenciación de exponente par, el resultado es siempre positivo independientemente del signo de la base.

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^2 = +\frac{25}{9} \qquad \left(+\frac{3}{4}\right)^4 = +\frac{81}{256}$$

- En la potenciación de exponente impar, el resultado lleva el mismo signo que la base.

$$\left(-\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{125}{27} \qquad \left(+\frac{6}{4}\right)^3 = +\frac{216}{64}$$

- En la radicación con índice par y radicando positivo, la raíz es positiva y negativa. Pero cuando el radicando es negativo, no tiene solución en el conjunto de los números Reales.

$$\sqrt{+\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5} \qquad \sqrt{-\frac{81}{36}} = No\ tiene\ solución\ en\ R$$

- En la radicación de índice impar, la raíz lleva el mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[3]{+\frac{512}{27}} = +\frac{8}{3} \qquad \sqrt[3]{-\frac{125}{343}} = -\frac{5}{7}$$

Para calcular potencias y raíces de números periódicos, primero se pasan a fracción.

$$\left(-0,\widehat{63}\right)^2 = \left(-\frac{7}{11}\right)^2 = +\frac{49}{121} \qquad \sqrt{0,\hat{4}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Exponentes negativos

Si el exponente es negativo, se invierte la fracción y el exponente se convierte en positivo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \qquad \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} = (-5)^3 = -125 \qquad (-7)^{-1} = \left(-\frac{1}{7}\right)^1 = -\frac{1}{7}$$

Actividades:

$1)\ \left(-0,\widehat{63}\right)^2 =$ $\quad 2)\sqrt{0,\hat{4}} =$ $\quad 3)\sqrt{0,36} =$ $\quad 4)(-5)^{-3} =$ $\quad 5)\left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} =$

$6)\ \sqrt[3]{-\frac{64}{729}} =$ $\quad 7)\sqrt{-\frac{16}{25}} =$ $\quad 8)\sqrt[3]{0,512} =$ $\quad 9)\left(-0,\hat{3}\right)^{-5} =$ $\quad 10)\left(0,\hat{7}\right)^{-2} =$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES:

Si todos los números de un cálculo son decimales, no hace falta pasar a fracción.

Si en el cálculo aparecen números decimales, fracciones y números periódicos, antes de operar hay que pasarlos a fracciones.

Para realizar cálculos combinados siempre hay que respetar la separación de términos, además de los paréntesis, corchetes y llaves que indican el orden en que deben resolverse.

$Ejemplo$: $0,75 - \left[\left(0,\hat{3} - 1\right)\ .\ 1,5\right] : \left(1,\hat{2} : 1,1\right) =$

$$\frac{75}{100} - \left[\left(\frac{3}{9} - 1\right) . \frac{15}{10}\right] : \left(\frac{12-1}{9} : \frac{11}{10}\right) =$$

$$\frac{3}{4} - \left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) . \frac{3}{2}\right] : \left(\frac{11}{9} : \frac{11}{10}\right) =$$

$$\frac{3}{4} - \left[\left(-\frac{2}{3}\right) . \frac{3}{2}\right] : \frac{10}{9} =$$

$$\frac{3}{4} - (-1) : \frac{10}{9} = \frac{3}{4} - \left(-\frac{9}{10}\right) = \frac{15+18}{20} = \frac{33}{20}$$

PORCENTAJE

En matemáticas, un **porcentaje** es una forma de expresar un número como una fracción que tiene el número 100 como denominador. También se le llama comúnmente **tanto por ciento**, donde *por ciento* significa “de cada cien unidades”. Se usa para definir relaciones entre dos cantidades, de forma que el *tanto* por ciento de una cantidad, donde *tanto* es un número, se refiere a la parte proporcional a ese número de unidades de cada cien de esa cantidad. El porcentaje se denota utilizando el símbolo %. Usamos esta noción en muchas situaciones de la vida diaria cuando las partes se expresan en el tanto por ciento correspondiente.

Cálculo de Porcentaje

El Porcentaje o Tanto por ciento se calcula a partir de variables directamente proporcionales (significa que si una variable aumenta la otra también aumenta y viceversa).

En el cálculo intervienen cuatro componentes:

Cantidad Total	----	100 %
Cantidad Parcial	----	Porcentaje Parcial

Ejemplo

(Cantidad total) $ 1.000 - equivale al - 100 % (porcentaje total)
(Cantidad parcial) $ 500 - equivale al - 50 % (porcentaje parcial)

Calcula el:

a) 12% de descuento por un artículo que vale $5.400.
b) 18% de incremento por pago fuera de término de una boleta de $ 438
c) Si en una libreta de notas, de 56 notas, 32 están sobre la nota 5 y 20 sobre o igual a la nota 4, ¿Qué porcentaje de las notas son deficientes?

Determina qué porcentaje es:

a) 35 alumnos de un colegio de 700 alumnos.
b) $2.540 de rebaja por una compra de $63.500
c) 357 manzanas podridas de un total de 1.500 manzanas.
d) 40 horas de trabajo semanal de una jornada de 48 horas.

Calcula cuál es:

a) El total de una deuda, sabiendo que el 8% de ella es $56.000
b) El precio de un artículo cuyo 12% es $3.600
c) La edad de un padre si el 24% de su edad equivale a la edad de su hija de 12 años.
d) El descuento del sueldo de un empleado si recibió $84.000 que equivale al 85%.

Marca la opción correcta

	I)	II)	III)	IV)	V)
a) El 0,01% de 0,1 es	I) 0,000001	II) 0,00001	III) 0,0001	IV) 0,001	V) 0,01
b) El 5% del 5% de 100000 es	I) 2.500.000	II) 250.000	III) 25.000	IV) 2.500	V) 250
c) ¿Qué porcentaje es 0,6 de $\frac{6}{5}$?	I) 2%	II) 5%	III) 50%	IV) 100%	V)150%
d) El 20% del reciproco de 20 es	I) 4	II) 400	III) 1/10	IV) 1/100	V) ninguna

Razones y Proporciones

La razón entre dos números a y b es el cociente entre ambos. Al número a se lo llama antecedente y al b consecuente 1,5/0,6=2,5 0,15/1,2=0,125

Cuando la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d, se dice que a, b, c y d forman una proporción.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ a los números a y d se los llama extremos y a los b y c medios.

Propiedad Fundamental de las proporciones

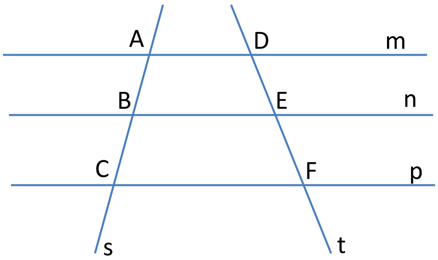
En toda proporción el producto de los medios e igual al producto de los medios.

En símbolos: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $entonces\ a\,.\,d = b\,.\,c$ $\quad \frac{1{,}5}{0{,}6} = \frac{5}{2} \Rightarrow 1{,}5\,.\,2 = 0{,}6\,.\,5 \Rightarrow 3 = 3$

Teorema de Thales

Dadas tres o más rectas paralelas **m // n // p** y dos transversales **s y t**, los segmentos formados en ambas transversales son proporcionales. Es decir, cualquier par de segmentos determinados sobre **s** es proporcional al par de segmentos determinados sobre **t**.

$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{AC}{DF}$



Ejemplos:

ab= 2 cm, bc= 6 cm, de= 3 cm, ef= x

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 3\,.\,6 \Rightarrow x = 18 : 2 \Rightarrow x = 9$$

ab= x+2, bc= x+5, de= 2, ef= 4

$$\frac{x+2}{x+5} = \frac{2}{4} \Rightarrow 4(x+2) = 2(x+5) \Rightarrow 4x + 8 = 2x + 10 \Rightarrow 4x - 2x = 10 - 8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 2{:}2$$

$$\Rightarrow\ x = 1 \qquad ab = 1 + 2 = 3\ \ y\ \ bc = 1 + 5 = 6$$

<u>Actividades</u>

1) ab= x, bc= 4,5, de= 2, ef= 3
2) ac= 24, bc=9, df= 20, ef= x
3) ac= x, bc= 4, de= 9, ef=3
4) ab= 4, bc= 8, de= x, ef= 6
5) ab= 2, bc= x, de= 3, ef= 4

<u>Actividades</u>

$$a)\,\frac{1}{0{,}5^2} = \frac{1 - 0{,}2}{3x - 4} \qquad b)\,\frac{1 + 2x}{5} = \frac{2}{1 - 2x} \qquad c)\,\frac{\sqrt{0{,}\hat{1}} + \frac{4}{3}}{2x - 1} = \frac{5}{6} \qquad d)\,\frac{x - 2}{2x + 6} = \frac{0{,}5x + 2}{x + 1}$$

$$e)\,\frac{3(x+1)}{5} = \frac{2(3x-4)+2}{6} \qquad f)\,\frac{2(x-3)}{3} = \frac{4(x-2){:}3}{\frac{5}{2}} \qquad g)\,\frac{x + 2(1+x)}{8} = \frac{7(3-x)-2}{5}$$

LOS TRIÁNGULOS Y SU CLASIFICACIÓN

Definiciones y propiedades

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción de plano limitada por tres segmentos unidos, dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan el triángulo se denominan lados, y los extremos de los lados, vértices. En un triángulo se consideran dos tipos de ángulos: interior (formado por dos lados) y exterior (formado por un lado y la prolongación de otro).

Algunas propiedades

1. En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, es decir 180°.
2. En todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.
3. Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un lado y sus dos ángulos adyacentes.
4. Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo comprendidos.

<u>*La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°.*</u>

Hallar x (a, b y c son ángulos interiores de un triángulo)

1) $a = 3x + 5°, b = 2x + 45°, c = 9x - 10°$
2) $a = 3x - 21°, b = 2x + 43°, c = 9x - 24$
3) $a = 4x - 10°, b = 7x + 5°, c = 3x - 25°$
4) $a = 5x + 12°, b = 6x + 1°, c = 3x - 1°$
5) $a = 2x + 72°, b = x + 26°, c = 5x - 30°$
6) $a = x + 34°, b = 4x - 14°, c = 8x - 48°$

Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican atendiendo a sus lados y a sus ángulos.

Atendiendo a sus lados

a) Equiláteros: Son los que tienen sus 3 lados iguales.
b) Isósceles: Son los que tienen dos lados iguales.
c) Escalenos: Son los que sus 3 son lados desiguales.

Atendiendo a sus ángulos:

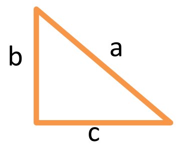
a) Rectángulos: Son los que tienen un ángulo recto (90°).
b) Acutángulos: Son los que tienen sus 3 ángulos agudos.
c) Obtusángulos: Son los que tienen un ángulo obtuso.

Construcción de triángulos

Para poder dibujar o construir un polígono basta con conocer algunos de sus elementos. Los diferentes casos que pueden plantearse para el triángulo son:

I. Conocidos los tres lados
II. Conocidos los tres ángulos (se pueden construir infinitos triángulos)
III. Conocidos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (el tercer lado viene automáticamente determinado por situarse en los extremos de los otros dos)
IV. Conocido un lado y los dos ángulos contiguos.

<u>Teorema de Pitágoras</u>



En todo triangulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$a^2 = b^2 + c^2$

Nota: la hipotenusa siempre es el lado más largo del triángulo y los catetos son los lados que forman el ángulo recto.

Calculen al valor del lado faltante en cada uno de los siguientes triángulos rectángulos:

a) C1= 6 cm, c2= 8 cm, h= x
b) c1= 3 cm, c2= x, h= 5 cm
c) c1=x, c2=9 cm, h= 15cm
d) c1=x, c2=8 cm, h=9 cm
e) c1= 5 cm, c2= x, h= 7 cm
f) c1= 12 cm, c2= x, h= 13 cm

<u>Razones Trigonométricas</u>

La trigonometría es la parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos.

En los triángulos rectángulos tenemos:

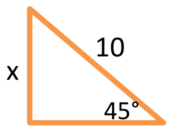
- Llamamos hipotenusa al lado más grande del triángulo
- Llamamos cateto opuesto al lado opuesto al ángulo α
- Llamamos cateto adyacente al lado adyacente al ángulo α

A partir de estos tres lados y este ángulo surgen tres relaciones muy importantes:

$$\text{seno } \propto = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad coseno\ \propto = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad tangente\ \propto = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

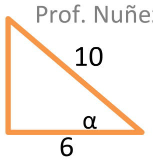
¿Para qué sirven estas tres fórmulas? Son muy útiles. Si para cualquier triángulo rectángulo tenemos como datos un lado y un ángulo, puedo calcular los otros lados usando dichas fórmulas. Y si tengo como datos el valor de dos lados, puedo calcular los ángulos y el lado que falta.

Veamos un ejemplo:



$$seno\ 45° = \frac{x}{10} => seno\ 45°\,.\,10 = x => x = 7{,}07$$

Veamos un ejemplo en el que calculamos un ángulo:



$$coseno\ \propto = \frac{6}{10} \Rightarrow coseno\ \propto = 0{,}6 \Rightarrow \propto = arc\cos 0{,}6 \Rightarrow \propto = 53{,}13° \Rightarrow \propto = 53°\ 7'21''$$

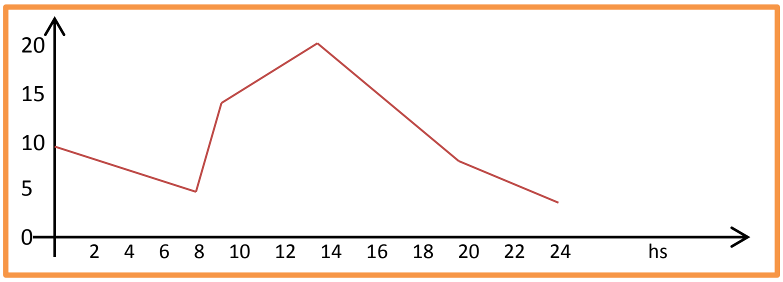
<u>Actividades</u>:

1) $ca = A, co = 12\ cm, h = B, \propto = 60°$ 2) $ca = A, co = B, h = 61, \propto = 42°$ 3) $ca = 28cm, co = B, h = A, \propto = 30°$

4) $ca = B, co = 24\ cm, h = A, \propto = 50°$ 5) $ca = 35cm, co = A, h = B, \propto = 40°$ 6) $ca = A, co = B, h = 26cm, \propto = 56°$

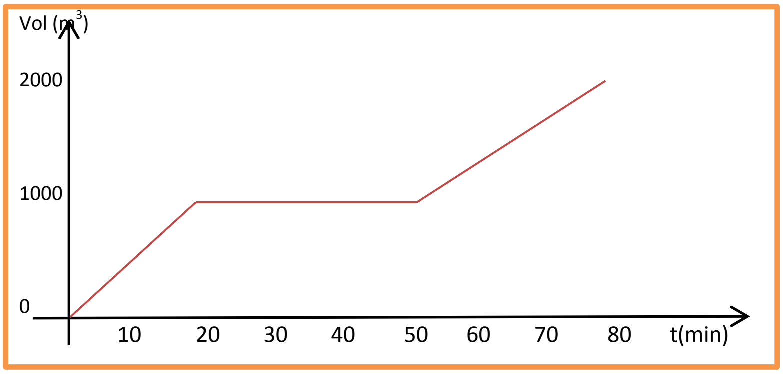
<u>Funciones</u>

Este grafico muestra las distintas temperaturas que se registraron en Catamarca durante un día del año



e) ¿Qué temperatura había a las 8 hs?
f) ¿Y a las 14 hs?
g) ¿Cuándo hubo mayor temperatura, a las 7 hs o a las 18 hs de ese día? Justifica tu respuesta.
h) ¿en qué momento del día la temperatura aumento?¿en qué momento disminuyó?¿Cuál fue la máxima temperatura del día?¿y la mínima?

En un club están llenando la pileta para bebes y el grafico muestra la cantidad de agua que esta contiene en función del tiempo transcurrido. Mientras la pileta se llenaba se cortó la luz, lo que interrumpió el flujo de agua (pues se detuvo la bomba). Cuando la luz volvió el ingreso de agua se reinició.



a) ¿Cuánto tiempo después de comenzar a llenarse la pileta se cortó la luz?
b) ¿Cuánta agua contenía la pileta en el momento del corte?
c) ¿Cuánto tiempo estuvo cortada la luz?
d) Si comenzaron a llenar la pileta a las 6 hs ¿a qué hs terminaron?
e) ¿Cuánta agua tenía la pileta en el momento en que dejaron de llenarla?

Un gráfico es una representación que permite visualizar de qué manera se relacionan dos magnitudes y cómo se modifica una cuando cambia la otra. Como las magnitudes relacionadas varían, se las llaman **variables**.
Cuando se relacionan dos variables es posible analizar si una depende de la otra. Por ejemplo, si se considera la temperatura y la hora del día en la que se registró, puede decirse que la temperatura depende del tiempo, ya que dependiendo del momento de día, ésta podría tomar diferentes valores. En este caso se dice que la temperatura es la <u>variable dependiente</u> y que el tiempo es la <u>variable independiente</u>.
En los gráficos la variable independiente suele representarse en el eje horizontal y la variable dependiente en el eje vertical.
Por lo tanto una **función** es una relación entre dos variables en la cual a cada valor de una de ellas le corresponde *siempre un único valor* de la otra.
Cuando el gráfico de una función es una **recta** se verifica que cada vez que aumenta la variable independiente, la variación de la función es la misma. Decimos que la función varía en forma constante. Las funciones cuyos gráficos son rectas forman la familia de funciones conocidas con el nombre de **funciones lineales**.
Para vaciar una pileta que contiene 30000 litros de agua, una bomba extrae 5000 litros por hora.

a) ¿Cuánto tardará en vaciarla, suponiendo que no hay interrupciones y que el agua se extrae en forma constante?

b) Completa la tabla

Tiempo en horas	0	1	2	3	4	5	6
Cantidad de agua que queda en la pileta en litros							

c) Representa gráficamente el proceso de vaciamiento

d) Si el vaciamiento se interrumpiera a las 2 horas de comenzado y se reanudará al cabo de otras 2 horas, ¿cómo cambiarías el grafico que construiste en c?

e) ¿cómo sería el gráfico correspondiente al vaciamiento sin interrupciones, si las variables en juego fueran el tiempo de vaciamiento y la cantidad de agua que sale de la pileta, en lugar de la cantidad que queda en ella?

Cuando se representa una función en el sistema de ejes cartesianos y los puntos de esa función pertenecen todos a una misma recta, se trata de una **función afín**.

La fórmula de una función afín es **y= a x + b** donde "a" es la pendiente de la recta y "b" es la ordenada al origen.

Elabora la tabla de valores correspondiente para cada función y luego representa gráficamente.

a) y= x b) y= 3x+1 c) y= 2x-3 d) y= - 2x+1 e) y= 4x f) y= - 3x g) y= - 5x +2 h) y= 6x -3

$i)\ y = \frac{2}{3}x + 1$ $\quad j) y = -\frac{1}{2}x - 3$ $\quad k)\ y = \frac{5}{3}x - 2$ $\quad l)\ y = -\frac{1}{4}x + 2$

Rectas paralelas: Dos o más rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

$$Ejemplo: y = -\frac{2}{3}\ x - 6 \quad es\ paralela//\ a\ \ y = -\frac{2}{3}\ x\ + 5$$

Rectas perpendiculares: dos rectas son perpendiculares si sus pendientes son opuestas e inversas.

$$Ejemplo: y = -\frac{2}{3}\ x - 6 \quad es\ perpendicular\ \ a\ \ y = +\frac{3}{2}\ x\ + 5$$

<u>Actividades</u>

1º) Construya una tabla de valores (para x= -2, -1, 0, 1, 2) y grafique las siguientes funciones lineales, empleando sistemas de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares:

a) y= 3 x + 1 **b)** y= - 2 x + 3 **c)** y= 4 x – 2 **d)** y= 5 x - 1 **e)** y= - x + 2

2º) Indique cuál es la ordenada al origen y cuál es la pendiente de las siguientes rectas, y grafique cada una de ellas teniendo en cuenta sólo estos dos valores:

a) $y=\frac{2}{3}x+5$ **b)** $y=\frac{1}{2}x-2$ **c)** y= 3 x + 1 **d)** $y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{2}$ **e)** $y=-\frac{2}{3}x-1$

f) $y=-\frac{5}{2}x+4$ **g)** $y=\frac{3}{4}x$ **h)** y= - 2 x - 3 **i)** $y=-\frac{3}{4}x$ **j)** $y= x-1$

3º) ¿Cuándo dos rectas son paralelas? ¿Cuándo son perpendiculares?

4º) Grafique en un mismo sistema de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares, cada uno de los siguientes grupos de rectas:

a) $y=\frac{2}{3}x+4$, $y=\frac{2}{3}x+1$, $y=\frac{2}{3}x-3$ **b)** $y=-\frac{3}{5}x$, $y=-\frac{3}{5}x+4$, $y=-\frac{3}{5}x-2$

c) $y= x+4$, $y= x-2$, $y= x$ **d)** $y=-\frac{1}{3}x+5$, $y=-\frac{1}{3}x+1$, $y=-\frac{1}{3}x-3$

5º) Grafique en un mismo sistema de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares, cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) $y = -\frac{2}{3}x + 4$, $y = \frac{3}{2}x + 1$ **b)** $y = -\frac{3}{5}x$, $y = \frac{5}{3}x + 4$

6°) Marca la opción correcta

a) La pendiente de la recta paralela a la recta y= 1 - 2x es I) -1/2 II) -2 III) 1/2 IV) 1 V) -1

b) La pendiente de la recta perpendicular a a la recta y= -5x + 3 es I) 1/5 II) – 5 III) -1/5 IV) 3 V) -3

<u>ESTADISTICA</u>

Definición de Estadística

La **Estadística** trata del recuento, ordenación y clasificación de los datos obtenidos por las observaciones, para poder hacer comparaciones y sacar conclusiones.

Un **estudio estadístico** consta de las siguientes fases:

- Recogida de datos.
- Organización y representación de datos.
- Análisis de datos.
- Obtención de conclusiones.

Conceptos de Estadística

- **Población**: Una población es el conjunto de todos los elementos a los que se somete a un estudio estadístico.
- **Individuo**: Un individuo o unidad estadística es cada uno de los elementos que componen la población.
- **Muestra**: Una muestra es un conjunto representativo de la población de referencia, el número de individuos de una muestra es menor que el de la población.
- **Muestreo**: El muestreo es la reunión de datos que se desea estudiar, obtenidos de una proporción reducida y representativa de la población.
- **Valor**: Un valor es cada uno de los distintos resultados que se pueden obtener en un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtenemos dos valores: cara y cruz.
- **Dato**: Un dato es cada uno de los valores que se ha obtenido al realizar un estudio estadístico. Si lanzamos una moneda al aire 5 veces obtenemos 5 datos: cara, cara, cruz, cara, cruz

<u>Definición de variable</u>

Una variable estadística es cada una de las características o cualidades que poseen los individuos de una población.

<u>Tipos de variable estadísticas</u>

<u>Variable cualitativa</u>: Las variables cualitativas se refieren a características o cualidades que no pueden ser medidas con números. Podemos distinguir dos tipos:

- **Variable cualitativa nominal**: Una variable cualitativa nominal presenta modalidades no numéricas que no admiten un criterio de orden. Por ejemplo: El estado civil, con las siguientes modalidades: soltero, casado, separado, divorciado y viudo.
- **Variable cualitativa ordinal**: Una variable cualitativa ordinal presenta modalidades no númericas, en las que existe un orden. Por ejemplo: La nota en un examen: suspenso, aprobado, notable, sobresaliente. Puesto conseguido en una prueba deportiva: 1º, 2º, 3º, ... Medallas de una prueba deportiva: oro, plata, bronce.

<u>Variable cuantitativa:</u> Una variable cuantitativa es la que se expresa mediante un número, por tanto se pueden realizar operaciones aritméticas con ella. Podemos distinguir dos tipos:

- **Variable discreta:** Una variable discreta es aquella que toma valores aislados, es decir no admite valores intermedios entre dos valores específicos. Por ejemplo: El número de hermanos de 5 amigos: 2, 1, 0, 1, 3.

- **Variable continua:** Una variable continua es aquella que puede tomar valores comprendidos entre dos números. Por ejemplo: La altura de los 5 amigos: 1.73, 1.82, 1.77, 1.69, 1.75. En la práctica medimos la altura con dos decimales, pero también se podría dar con tres decimales

Actividades

1. Indica que **variables** son **cualitativas** y cuales **cuantitativas**:
   - ***a)*** Comida Favorita.
   - ***b)*** Profesión que te gusta.
   - ***c)*** Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada.
   - ***d)*** Número de alumnos de tu Instituto.
   - ***e)*** El color de los ojos de tus compañeros de clase.
   - ***f)*** Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.
2. De las siguientes **variables** indica cuáles son **discretas** y cuales **continúas**.
   - ***a)*** Número de acciones vendidas cada día en la Bolsa.
   - ***b)*** Temperaturas registradas cada hora en un observatorio.
   - ***c)*** Período de duración de un automóvil.
   - ***d)*** El diámetro de las ruedas de varios coches.
   - ***e)*** Número de hijos de 50 familias.
   - ***f)*** Censo de población.
3. Clasificar las siguientes **variables** en **cualitativas** y **cuantitativas discretas** o **continuas**.
   - ***a)*** La nacionalidad de una persona.
   - ***b)*** Número de litros de agua contenidos en un depósito.
   - ***c)*** Número de libros en un estante de librería.
   - ***d)*** Suma de puntos tenidos en el lanzamiento de un par de dados.
   - ***e)*** La profesión de una persona.
   - ***f)*** El área de las distintas baldosas de un edificio.